

Primer boletín

EJERCICIO 1: (a) Halle el campo eléctrico en un punto P situado a una distancia z por encima del extremo de un segmento de recta de longitud L que tiene una densidad lineal de carga λ . (b) Compruebe que su respuesta se reduce en primera aproximación al campo de una carga puntual de valor λL cuando $z \gg L$.

SOLUCIÓN: (a) Dividimos la línea de carga en segmentos diferenciales de carga $dq = \lambda dx$. Cada segmento genera en P un campo eléctrico dado por (ver figura)

$$d\mathbf{E} = dE \cos \theta \mathbf{e}_x + dE \sin \theta \mathbf{e}_y$$

donde, de la ley de Coulomb

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\lambda dx}{r^2}$$

En términos de x y z , tenemos

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad \sin \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

de modo que

$$E_x(P) = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \lambda dx = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + L^2}} \right)$$

Por otra parte

$$E_y(P) = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \lambda dx$$

Esta integral no es inmediata. La resolvemos mediante un cambio de variable

$$\begin{bmatrix} x = z \sinh t \\ dx = z \cosh t dt \end{bmatrix}$$

Queda

$$E_y(P) = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon} \int_0^{\sinh^{-1}(L/z)} \frac{z \cosh t}{(z^2 \sinh^2 t + z^2)^{3/2}} dt = \frac{\lambda}{4z\pi\epsilon} \int_0^{\sinh^{-1}(L/z)} \frac{dt}{\cosh^2 t}$$

donde se ha usado que $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Continuamos

$$\frac{\lambda}{4z\pi\epsilon} \int_0^{\sinh^{-1}(L/z)} \frac{dt}{\cosh^2 t} = \frac{\lambda}{4z\pi\epsilon} \tanh \left(\sinh^{-1} \frac{L}{z} \right)$$

Nótese que si llamamos $\phi = \sinh^{-1} w$, entonces

$$\tanh \phi = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \frac{\sinh \phi}{\sqrt{1 + \sinh^2 \phi}} = \frac{w}{\sqrt{1 + w^2}}$$

con lo cual

$$E_y(P) = \frac{\lambda}{4z\pi\epsilon} \frac{L/z}{\sqrt{1 + (L/z)^2}} = \frac{\lambda}{4z^2\pi\epsilon} \frac{L}{\sqrt{1 + (L/z)^2}}$$

Resulta finalmente

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + L^2}} \right) \mathbf{e}_x + \frac{\lambda}{4z^2\pi\epsilon} \frac{L}{\sqrt{1 + (L/z)^2}} \mathbf{e}_y$$

(b) Si $z \gg L$, podemos efectuar las aproximaciones

$$z^2 + L^2 \cong z^2 \qquad \frac{L}{z} \cong 0$$

En estas condiciones, el campo eléctrico en p se reduce a

$$E_x(P) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \right) \cong 0$$

$$E_y(P) \cong \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon} \frac{1}{z^2}$$

como era de esperar.

EJERCICIO 2: Un cuenco hemisférico de radio R tiene una densidad de carga uniforme σ . Encuentre la diferencia de potencial entre el 'polo norte' y el centro.

SOLUCIÓN: El potencial electrostático creado por una carga puntual tiene por expresión

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$$

donde hemos anulado la constante de integración C para que $\phi(\infty) = 0$. Trataremos la semiesfera como un conjunto de cargas elementales, con potencial asociado

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq}{r}$$

y hallaremos el potencial en el centro (A) y en el 'polo norte' (B) por integración, usando que $dq = \sigma dS$. En lo referente al primero, $r = R$ para todos los diferenciales de carga, y

$$\phi(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sigma dS}{R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon R} \int dS = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon R} \cdot 2\pi R = \frac{\sigma R}{2\epsilon}$$

El 'polo norte' no goza de características tan privilegiadas. Recurriremos a la expresión del diferencial de superficie en coordenadas esféricas, $dS = R^2 \sin\theta d\varphi d\theta$. Tenemos

$$\phi(B) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \int \frac{R^2 \sin\theta d\varphi d\theta}{r}$$

En virtud del teorema del coseno, $r^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos \theta$

$$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \int \frac{R^2 \sin \theta d\varphi d\theta}{r} = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sin \theta d\varphi d\theta}{\sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos \theta}}$$

Integramos sobre toda la semiesfera

$$\phi(B) = \frac{\sigma R}{4\sqrt{2}\pi\epsilon} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} d\varphi d\theta = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\epsilon} [\sqrt{1 - \cos \theta}]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma R}{\sqrt{2}\epsilon}$$

Como podía predecirse, $\phi(B) > \phi(A)$, y su diferencia queda

$$\phi(B) - \phi(A) = \frac{\sigma R}{\epsilon} (\sqrt{2} - 1)$$

EJERCICIO 3: Una esfera de radio R_1 que está cargada con una densidad de carga uniforme ρ tiene una cavidad de radio R_2 no concéntrica con la esfera. El centro de la cavidad se encuentra en el punto O' , a la distancia d del centro de la esfera. Calcular el campo eléctrico en el interior de la cavidad.

SOLUCIÓN: En primer lugar, hemos de conocer el campo eléctrico creado por una esfera uniformemente cargada no conductora en un punto interior. Basta con aplicar el teorema de Gauss a una esfera gaussiana de radio r menor que el de la esfera cargada

$$\oint_{S(r)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) 4\pi r = \frac{Q_{int}}{\epsilon} = \frac{\rho V}{\epsilon} = \frac{4}{3} \frac{\rho \pi r^3}{\epsilon}$$

se tiene

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon} r$$

Para obtener el campo pedido, remplazamos la esfera cargada con la cavidad por dos esferas superpuestas de iguales densidades de carga, de modo que una de ellas es la esfera del enunciado sin cavidad y la otra tiene el mismo tamaño que el citado agujero y ocupa su lugar. La situación resultante es equivalente a la original desde el punto de vista electrostático.

Tomemos un punto P en el interior de la cavidad. El campo en P será el resultante de sumar las contribuciones de las dos esferas cargadas, cuyo valor modular conocemos por el teorema de Gauss. Sus direcciones, sin embargo, no coinciden, pues las esferas no tienen el mismo centro. Sean $\mathbf{r}_+$ y $\mathbf{r}_-$ los vectores que conectan los centros de las esferas de cargas positiva y negativa con P , respectivamente. Los campos eléctricos de las citadas esferas en P vienen dados por

$$\mathbf{E}_+(P) = \frac{\rho}{3\epsilon} \mathbf{r}_+ \quad \mathbf{E}_-(P) = -\frac{\rho}{3\epsilon} \mathbf{r}_-$$

Consideremos el vector que une los centros de las dos esferas, $\mathbf{d}$. Se tiene la relación

$$\mathbf{d} + \mathbf{r}_- = \mathbf{r}_+$$

por tanto

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_+(P) + \mathbf{E}_-(P) = \frac{\rho}{3\epsilon} \mathbf{r}_+ - \frac{\rho}{3\epsilon} \mathbf{r}_- = \frac{\rho}{3\epsilon} \mathbf{r}_+ - \frac{\rho}{3\epsilon} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{d}) = \frac{\rho}{3\epsilon} \mathbf{d}$$

En contra de lo esperado, el campo eléctrico en el interior de la cavidad es constante.

EJERCICIO 6: (a) En el plano XY se tiene medio anillo circular de radio R con densidad lineal de carga $\lambda = \lambda_0 \cos \phi$, siendo ϕ la correspondiente coordenada cilíndrica. (a) Halle el potencial y el campo electrostáticos en los puntos del eje Z. (b) Si en el punto $\mathbf{r}_0 = a\hat{\mathbf{e}}_z$ se coloca un dipolo puntual de valor $\mathbf{p}_0 = p_0\mathbf{e}_z$, ¿qué fuerza ejerce el medio anillo sobre este dipolo? (c) Demuestre que para puntos alejados el campo del medio anillo se comporta como el de un dipolo, y halle la orientación y el valor de dicho dipolo.

SOLUCIÓN: (a) Como es costumbre, segmentamos el medio anillo en elementos diferenciales de carga $dq = \lambda d\ell$, donde $d\ell$ es un diferencial de arco. Este está relacionado con el ángulo subtendido $d\phi$ según

$$d\phi = \frac{d\ell}{R} \implies d\ell = R d\phi$$

Fijamos un punto del eje Z. El potencial generado por el elemento de carga se escribe

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\lambda R d\phi}{r} = \frac{R\lambda_0}{4\pi\epsilon} \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Sumamos todas las contribuciones infinitesimales

$$\varphi = \int_{\text{anillo}} d\varphi = \frac{R\lambda_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \int_0^\pi \cos \phi d\phi = \frac{R\lambda_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} [\sin \phi]_0^\pi = 0$$

El potencial electrostático es nulo en todos los puntos del eje Z. Esto implica que la componente según el eje Z del campo eléctrico es cero. En efecto, a lo largo de este eje

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \implies E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z = 0$$

Analizando la geometría del problema, se puede deducir que E_y también se cancela en esta región. A pesar de ello, lo mostraremos explícitamente. Utilizaremos de nuevo la división del medio anillo en elementos de carga. Sea θ el ángulo comprendido entre $d\mathbf{E}$ y el eje Z. Puede verificarse gráficamente que

$$dE_x = -dE \sin \theta \cos \phi$$

$$dE_y = -dE \sin \theta \sin \phi$$

y que

$$\sin \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Integramos

$$E_x = \int_{\text{anillo}} dE_x = -\frac{R^2\lambda_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi$$

Esta integral se reduce a una inmediata tras aplicar la fórmula del coseno del ángulo mitad (salvo signo)

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Por ende

$$\int \cos^2 \phi d\phi = \int \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi = \frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} + C$$

Esto permite obtener la componente buscada

$$E_x = -\frac{R^2 \lambda_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} \right]_0^\pi = -\frac{R^2 \lambda_0}{8\epsilon} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Repetimos el proceso con la otra componente

$$E_y = \int_{\text{anillo}} dE_y = -\frac{R^2 \lambda_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^\pi \cos \phi \sin \phi d\phi = -\frac{R^2 \lambda_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^\pi = 0$$

En definitiva

$$\mathbf{E} = -\frac{R^2 \lambda_0}{8\epsilon} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{e}}_x$$

(b) Haremos uso de la ecuación

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

En coordenadas cartesianas

$$\mathbf{F} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$$

Introduciendo los datos del problema y suponiendo que el dipolo puntual está situado a una distancia arbitraria z del origen, esto da

$$\mathbf{F}(z) = p_0 \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{3p_0 R^2 \lambda_0}{8\epsilon} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{5/2}} \hat{\mathbf{e}}_x$$

Hacemos $z = a$

$$\mathbf{F} = \frac{3p_0 R^2 \lambda_0}{8\epsilon} \frac{a}{(a^2 + R^2)^{5/2}} \hat{\mathbf{e}}_x$$

(c) Para puntos muy alejados del origen, $z \gg R$ y podemos recurrir a la aproximación $z^2 + R^2 \cong z^2$. El campo eléctrico adopta entonces la expresión

$$\mathbf{E} \cong -\frac{R^2 \lambda_0}{8\epsilon} \frac{1}{z^3} \hat{\mathbf{e}}_x$$

Sabemos que el campo creado por un dipolo puntual es de la forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]$$

Particularizando a un punto del eje Z, $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{e}}_z$. En esta última ecuación, hagamos

$$\mathbf{p}_a = \frac{R^2 \lambda_0 \pi}{2} \hat{\mathbf{e}}_x$$

El campo creado por este dipolo sobre puntos del eje Z viene dado por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{R^2 \lambda_0 \pi}{2} \frac{1}{z^3} \hat{\mathbf{e}}_x \right] = -\frac{R^2 \lambda_0}{8\epsilon} \frac{1}{z^3} \hat{\mathbf{e}}_x$$

que es justamente el campo eléctrico creado por el medio anillo a grandes distancias del origen.